$Exercice\ 1$

1) $Soit\ M\ la\ matrice\ définie\ par\ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

   $Déterminer\ M^3\ puis\ en\ déduire\ que\ M\ n'est\ pas\ inversible.$

2) $Soit\ A\ une\ matrice\ carrée\ d'ordre\ 3\ vérifiant\ A^2 \neq 0\ et\ A^3 = 0.$

   $a)\ Montrer\ que\ A\ n'estpas\ inversible.$

   $b)\ Vérifier\ que\ X^3 = 1 - (1 - X)(1 + X + X^2).$

   $c)\ En\ remarquant\ que\ X^3\ est\ un\ polynôme\ annulateur\ de\ A, montrer\ que\ I - A$ $est\ inversible\ et\ calculer\ son\ inverse.$

3) $Montrer\ également\ que\ I + A\ est\ inversible\ et\ donner\ son\ inverse.$

Exercice 1

1) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{M^3 = 0}$

Or, si M était inversible, on aurait alors la relation suivante :

$$M^3 M^{-1} = 0 \times M^{-1}$$

$$M^3 M^{-1} = 0$$

$$M^2 . M . M^{-1} = 0$$

$$M^2 = 0$$

Or, on a $M^2 \neq 0$. Par conséquent, M n'est pas inversible.

2) a) Grâce à 1.), on sait qu'avec $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$, M ne peut être inversible. Dès lors, pour n'importe quelle matrice A vérifiant les propriétés $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$, A n'est pas inversible.

b) $1 - (1 - X)(1 + X + X^2) = 1 - (1 + X + X^2 - X - X^2 - X^3)$

$= 1 - (1 - X^3) = 1 - 1 + X^3 = X^3.$

On a donc bien : $\boxed{X^3 = 1 - (1 - X)(1 + X + X^2)}$

c) On note $P(X) = X^3$ un polynôme. On a alors :

$$P(A) = A^3 = 0.$$

X^3 est donc bien un polynôme annulateur de A.

Or, d'après 2. b), on sait que $X^3 = 1 - (1-X)(1+X+X^2)$.

On a donc : $$A^3 = 0$$

$$I - (I-A)(I+A+A^2) = 0$$

$$I = (I-A)(I+A+A^2)$$

Par conséquent, $I-A$ est bien inversible on a :

$$\boxed{(I-A)^{-1} = I+A+A^2}$$

3) Developpons $(1+X)(1-X+X^2)$.

$(1+X)(1-X+X^2) = 1-X+X^2+X-X^2+X^3 = 1+X^3$

On a donc : $(I+A)(I-A+A^2) = I+A^3$

Or, on sait que $A^3 = 0$ ce qui donne :

$$(I+A)(I-A+A^2) = I.$$

$I+A$ est donc bien inversible et on a :

$$\boxed{(I+A)^{-1} = (I-A+A^2)}$$